Die Maxwell-Gleichungen verstehen

Josef Leisen, Universität Mainz

James Clerk Maxwell schrieb: *„Ich würde einen meiner sehnlichsten Wünsche erfüllt sehen, wenn es mir gelungen sein sollte, dem einen oder anderen Studenten das Verständnis von FARADAYs Ideen und Ausdrucksweise zu erleichtern und anderen den Genuss zu verschaffen, den ich selbst empfand als ich die Researches des großen Physikers las.“*

Die Maxwell-Gleichungen gehören zu den berühmtesten der Physik. Sie beschreiben vollständig und elegant die Struktur elektrischer und magnetischer Felder und die Entstehung elektromagnetischer Wellen. Der mathematische Formalismus ist jedoch so schwierig, dass er das Schulniveau deutlich übersteigt. Kann man als Schüler die Maxwell-Gleichungen mathematisch formal verstehen? Nein, keine Chance! Kann man als Schüler die prinzipiellen Aussagen der Maxwell-Gleichungen verstehen? Ja, das ist möglich. Und damit bekommt man auch eine ungefähre Ahnung, wie die mathematische Symbolik dazu passt. Es bleibt aber auch wohl bei der „ungefähren Ahnung“, die aber durchweg tiefe Einsichten und ein Grundverständnis bringt.

Die Maxwell-Gleichungen lauten

in Integralform:	in Differentialform:
1.) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\int_A \vec{E}\cdot d\vec{A} + \mu_0\int_A \vec{j}\cdot d\vec{A}$	1.) rot $\vec{B} = \mu_0\, e_0\, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0\, \vec{j}$ (bzw. $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\, e_0\, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0\, \vec{j}$)
2.) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \vec{B}\cdot d\vec{A}$	2.) rot $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (bzw. $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$)
3.) $\int_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\cdot dV$	3.) div $\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\$\,\rho$ (bzw. $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\$\,\rho$)
4.) $\int_A \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$	4.) div $\vec{B} = 0$ (bzw. $\nabla\cdot\vec{B} = 0$)

Dazu gehören ebenfalls noch die Maxwell-Hertz-Wellengleichungen:
$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} = \mu_0\, e_0\, \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial x^2} = \mu_0\, e_0\, \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

In diesen Gleichungen werden die Kernaussagen der Elektrodynamik in ihrer reduziertesten Form elementarisiert, bleiben aber fachlich korrekt. Die Darstellung ist damit gleichsam unverzichtbares Grundwissen, tragende Idee und gewichtige Einsicht.

Zum Verständnis der vorkommenden Buchstaben und Symbolen

Bekannt sein sollten e_0 und μ_0, zwei physikalische Konstanten, die in den Formeln für elektrische und magnetische Felder auftauchen. Sie heißen elektrische und magnetische Feldkonstante. Ihren Wert kann man in Formelsammlungen nachschlagen. $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind die Feldstärken des elektrischen und magnetischen Feldes. A ist die Fläche, welche die im Magnetfeld B befindliche Leiterschleife umschließt. $\vec{A}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der Fläche A steht und dessen Länge als Maßzahl der Größe der Fläche entspricht.
ρ ist die Raumladungsdichte, d.h. $\rho = \frac{Q}{V}$, d.h. die Ladung des Objektes pro Volumen.
j ist die Stromdichte, d.h. $j = \frac{I}{A_{quer}}$ (Stromstärke pro Querschnittsfläche des Leiters). Als Vektor $\vec{j}$ stimmt die Richtung mit der Driftgeschwindigkeit der Elektronen überein, während die Länge als Maßzahl der oben beschriebene Quotient ist.

Das Integralzeichen $\int$ sollte bekannt und verstanden sein. Steht unten rechts ein „A“ darunter, so heißt es, dass man nicht, wie in der Schule gewohnt, entlang der x-Achse integriert, sondern über die Fläche A. Beim normalen Integral geht man bekanntlich die x-Achse entlang und schaut sich an jeder Stelle den zugehörigen Funktionswert an. Beim Flächenintegral wird das Stück x-Achse durch eine Fläche ersetzt. Beim „Wegintegral“ (Zeichen $\oint$) läuft man entlang eines evtl. krummlinigen Weges und schaut sich an jedem Wegstück den Funktionswert (hier: die Stärke des B-Feldes bzw. E-Feldes) an. Beliebt ist es dabei auch, wenn der Weg wie ein „Rundwanderweg“ geschlossen ist, d.h. Startpunkt = Endpunkt ist.

$\frac{\partial}{\partial t}$ ist eine „partielle Ableitung“, sprich eine „teilweise Ableitung“. Die Feldstärke ($\vec{E}$ oder $\vec{B}$) hängt von den Raumkoordinaten x, y und z ebenso wie von der Zeit t ab, ist also eine Vektorfunktion $\vec{E}(x,y,z,t)$. Bei der partiellen Ableitung z.B. nach t werden alle Abhängigkeiten von x, y und z als konstant betrachtet und nur t als die Variable, nach der abgeleitet wird.

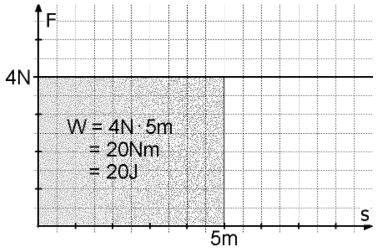
Der Nabla-Operator $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ enthält in seinen 3 Koordinaten jeweils die Anweisung (= Operation) „Leite partiell nach x bzw. nach y bzw. nach z“ ab. Er lässt sich wie ein normaler Vektor als Skalar- oder Kreuzprodukt mit anderen Vektoren kombinieren. Hier sei $\vec{v}$ ein Vektor, dessen Koordinaten v_1, v_2 und v_3 auch jeweils von x, y, z und t abhängen können:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot v_1 + \frac{\partial}{\partial y} \cdot v_2 + \frac{\partial}{\partial z} \cdot v_3 (*) \quad \text{und } \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \cdot v_3 - \frac{\partial}{\partial z} \cdot v_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} \cdot v_1 - \frac{\partial}{\partial x} \cdot v_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} \cdot v_2 - \frac{\partial}{\partial y} \cdot v_1 \end{pmatrix}.$$

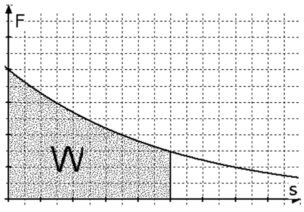
(*): z.B. $\frac{\partial}{\partial x} \cdot v_1$ heißt: Leite die Koordinate v_1, die ja von x abhängen kann, partiell nach x ab.
(Sie müssen an dieser Stelle nicht die zwei verschiedenen Arten, wie man Vektoren miteinander multiplizieren kann, im Detail verstehen. Merken Sie sich aber, dass „$“ Skalarprodukt heißt, weil das Ergebnis ein Skalar, also eine Zahl, ist, während „x“ Kreuzprodukt oder Vektorprodukt genannt wird, weil als Ergebnis wieder ein Vektor herauskommt.)

Exkurs: Eine öfters verwendete mathematische Idee
Dir sollten Formeln in Produktform bekannt sein, z.B. Arbeit = Kraft mal Weg: W = F*s .
Diese Formeln haben aber immer nur dann Gültigkeit, wenn beide Größen konstant sind. Hier: Die Kraft darf sich während des Weges nicht ändern. Beim Hochheben eines Objektes scheint

das erst einmal zu gelten. Hebt man es aber immer weiter und weiter, so wird die Kraft während des Hebens schwächer. Was nun?



Idee: Erstelle ich (für den Fall W = F*s) ein Diagramm der beiden Faktorgrößen (hier F und s), so entsteht logischerweise eine Parallele zur horizontalen Achse, da ja F über s konstant ist. Das Produkt (also die Arbeit) entspricht dann der Größe der Fläche zwischen Graph und horizontaler Achse.



Ist F über s nicht konstant, so bleibt aber der Zusammenhang „Die Arbeit entspricht der Flächengröße zwischen Graph und horizontaler Achse“ bestehen. Das kann man sich überlegen, indem man analog zur Integral-Idee winzige Abschnitte betrachtet, in denen man F als konstant ansetzen kann – die Gesamtarbeit ist dann die Summe dieser ganzen Einzelarbeiten (es entstehen dabei viele schmale Säulen, jede mit „Säulenfläche = Stückchen Arbeit“).

Insgesamt gilt damit die Formel: $W = \oint_s F \cdot ds$ (bzw. sogar $W = \oint_s \vec{F} \cdot d\vec{s}$), welche die Formel W = F*s für den Fall, dass F über s nicht konstant ist, verallgemeinert.

Zur Physik der Maxwell-Gleichungen

Welche Effekte sind grundsätzlich in der Elektrodynamik zu beobachten und worauf sind sie zurückzuführen? (Nebenbei: Wer hat sie wann entdeckt?)

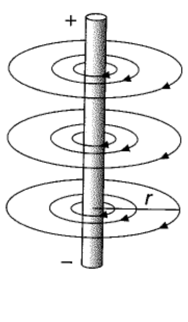
	Kernstruktur der E-Dynamik	verursacht…	entdeckt	von
1.	ruhende Ladung	ein elektrisches Feld	1785	Coulomb
2.	gleichförmige bewegte Ladung	ein magnetisches Feld	1820	Oersted
3.	beschleunigte Ladung	ein Strahlungsfeld	1888	Hertz
4.	zeitliche Magnetfeldänderung	Induktion / Ind.-Spannung	1831	Faraday
5.	Fehlen magn. Monopole	geschlossene Magnetfeldlinien	1820	Ampére

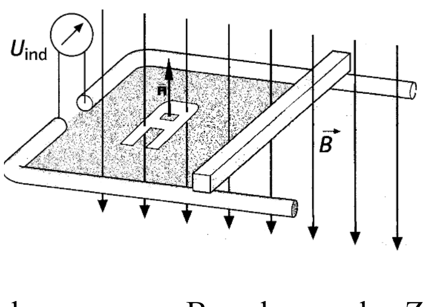
1873 gelang es Maxwell die Zusammenhänge 1., 2. und 4. und 5. in seine 4 Gleichungen zu fassen, die 3. Zeile entspricht der Maxwell-Hertz-Wellengleichung.

Die ersten beiden Maxwell´schen Gleichungen wurzeln in zwei bekannten Zusammenhängen:

a) Die Feldstärke eines Magnetfeldes eines geraden, stromdurchflossenen Leiters ist $B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I$ (Oersted).

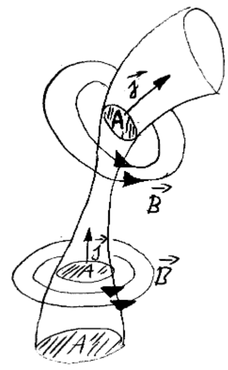
b) Die Induktionsspannung ist $U_{Ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\vec{A} \cdot \vec{B})}{dt}$ (Faraday).





Das Oersted-Gesetz besagt nun, dass man zur Berechnung des Zusammenhangs zwischen der Feldstärke B und dem verursachenden Stromfluss I dieser einmal ´umlaufen´ werden muss. Der

Mathematiker sagt dazu: Es wird ein Linienintegral gebildet, genauer gesagt, ist die Linie hier ein geschlossener Umlauf und daher heißt es Umlaufintegral und notiert dafür $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$. (Wäre B konstant und s eine gerade Strecke, so entspräche das dem Produkt $B \ \$ \ s$).



Im allgemeinen Fall ist der stromdurchflossene Leiter nicht schön gerade und mit einem konstanten Durchmesser, sondern ein „Stromschlauch“. (Man denke hierbei auch daran, dass Stromflüsse auch in ionisierten Gasen entstehen können.) Daher ist der „Stromdichtevektor $\vec{j}$“ wichtig, dessen Richtung der Richtung des Stromflusses entspricht und dessen Länge der Stromstärke pro Querschnittsfläche entspricht. Umgekehrt ist damit die Stromstärke durch das „Flächenintegral“ gegeben: $I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$, das ja die Verallgemeinerung des Produkts $j \ \$ \ A$ ist, wenn j nicht überall gleich ist.

Dann kann man das Oersted-Gesetz allgemeiner formulieren:
Aus $B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I$ <=> $B \ \$ \ 2\pi r = \mu_0 \ \$ \ I$ wird $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \ \$ \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + [\ldots]$

Da fehlt noch was (und zwar der Ausdruck „[…]“), aber damit haben wir schon fast die 1. Maxwellsche Gleichung notiert.

Verallgemeinern wir nun das Induktionsgesetz $U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$:
Die aus dem Unterricht bekannte Formel $U = E \ \$ \ s$ gilt leider nur für den Sonderfall, dass der Leiter gerade und das Feld im Inneren homogen ist. Für den Fall eines krummen Leiters mit inhomogenen Feld muss man entlang des krummlinigen Weges über die jeweilige Feldstärke integrieren und aus $U = E \ \$ \ s$ wird $U = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$.

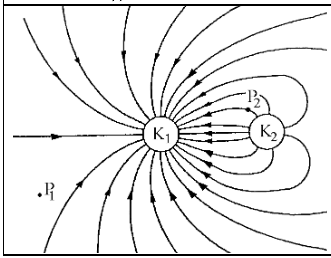
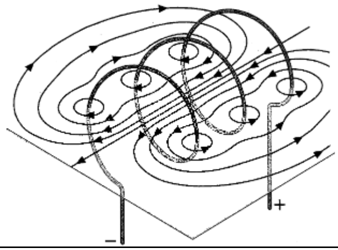
Auch der magnetische Fluss ϕ ist in der Form $\Phi = \vec{A} \cdot \vec{B}$ nur korrekt, wenn A eine ebene Fläche und das B-Feld homogen ist. Allgemein wird die Formel mit Hilfe eines Flächenintegrals über die Wirkungsfläche A beschrieben: $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$.

Damit können wir das Faraday-Gesetz verallgemeinern:
Aus U_{ind} $(= E \ \$ \ s) = -\frac{d\Phi}{dt}$ wird: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$.

Und schon haben wir die zweite Maxwell´sche Gleichung notiert.

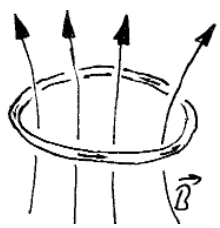
Weiter werden wir durch Symmetriegedanken geführt. Die jeweils linke Seite der ersten beiden Maxwell-Gleichungen ist sehr ähnlich ($\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ bzw. $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$), genauer gesagt, wechselt nur die Feldstärke vom elektrischen zum magnetischen Feld. Sollten dann nicht auch die rechten Seiten mathematisch gleich aufgebaut sein? Das würde doch die physikalische Symmetrie elektrischer und magnetischer Felder hervorragend beschreiben.

Leider scheint das nicht der Fall zu sein. Elektrische und magnetische Felder scheinen sich grundsätzlich zu unterscheiden:

Das elektrische Feld entspringt ruhenden elektrischen Ladungen („Quellen“) und die Feldlinien sind nie geschlossen, sondern haben einen festen Anfangspunkt und einen festen Endpunkt oder laufen ins Unendliche. Geschlossene Feldlinien bezeichnet der Physiker als „Wirbel“. Das elektrische Feld ist also „wirbelfrei“.	Magnetische Feldlinien sind hingegen immer geschlossen, weil es keine magnetischen Monopole gibt. Dafür findet man hier keine „Quellen“, die Anfangspunkte von Feldlinien sein können: Magnetfelder sind quellenfreie Wirbelfelder.
	

Wie lassen sich diese Sachverhalte mathematisch ausdrücken?

Beginnen wir bei den Wirbeln. Ist ein Feld wirbelfrei, so ist das Umlaufintegral eines beliebigen Umlaufs stets Null: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$. Man kann sich das so vorstellen: Wandere ich entlang eines beliebigen Rundwegs, so kann ich zwar im Laufe der Wanderung auf verschiedenen Höhen sein, aber am Ende bin ich wieder auf derselben Höhe wie vorher. Das heißt, eigentlich müsste eines der Maxwell´schen Gesetze $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ sein. Tatsächlich ist aber das dritte Gesetz: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$. Messerscharf geschlussfolgert: Unter bestimmten Bedingungen ist das E-Feld eben doch nicht wirbelfrei. Wie kann das sein? Die Antwort kennen Sie in der Form von „Wirbelströmen“.



Nehmen wir einfach einen Eisenring, der von einem Magnetfeld B senkrecht durchsetzt wird, genauer gesagt, von einem sich mit der Zeit ändernden Magnetfeld. Als Formel ausgedrückt heißt das, die Ableitung des magnetischen Flusses ist ungleich Null: $\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$. In dem Ring entsteht ein geschlossener, induktiv erzeugter Strom, der Wirbelstrom. Das zugehörige elektrische Feld muss also ein Wirbelfeld sein.
Den Ring können wir nun weglassen – er zeigt nur durch den Stromfluss, dass ein elektrisches Wirbelfeld vorhanden sein muss. Dieses existiert aber auch, wenn es keinen Leiter gibt, durch den Strom fließt, was man übrigens auch experimentell zeigen kann. Elektrische Wirbelfelder entstehen immer dann, wenn sich der magnetische Fluss eines B-Feldes zeitlich ändert.

Ruhende elektrische Ladungen erzeugen auch elektrische Felder, aber das sind keine Wirbelfelder. Das heißt, in der Elektrostatik (= E-Lehre ruhender Ladungen) gilt $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$.

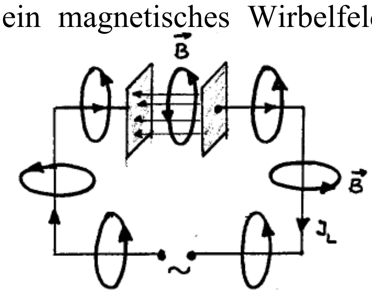
In der alternativen differentiellen Form lautet die Formel „rot $\vec{E} = 0$“. Der Ausdruck „rot“ steht für „Rotation“ und ist ein Maß für die Wirbelhaftigkeit eines Feldes. Berechnet wird es durch ein Kreuzprodukt des Nabla-Operators mit dem Feldvektor (rot $\vec{E} = \nabla \times \vec{E}$). Ein wirbelfreies E-Feld wird also durch rot $\vec{E} = 0$ bzw. $\nabla \times \vec{E} = 0$ notiert.

Aber auch die restliche Aussage, wann und wie das E-Feld eben nicht mehr wirbelfrei ist, steckt in dem Gesetz: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$. Das Integral auf der rechten Seite ist ja die allgemeine Definition des magnetischen Flusses ϕ. Davor finden wir die Anweisung „partielle Ableitung nach t". Mit anderen Worten: Nur wenn sich der magnetische Fluss zeitlich ändert, ist die rechte Seite ungleich Null. In der differentiellen Form „rot $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$" wird es noch deutlicher: Die Wirbelhaftigkeit des E-Feldes ist direkt proportional zur partiellen Ableitung nach t des B-Feldes. Ist B zeitlich konstant, ist $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$.

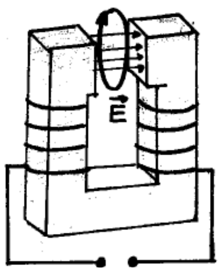
Widmen wir uns nun dem Magnetfeld. Das ist ein Wirbelfeld, also muss $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \neq 0$ sein. Tatsächlich ist ja das 1. Maxwell´sche Gesetz $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = [...] + \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$. Wenn Stromfluss existiert, existiert $\vec{j}$ und das Integral ist ungleich Null. Damit ist die Wirbelhaftigkeit des B-Feldes schon mal erfasst.
In der Differentialform lautet die Maxwell-Gleichung: rot $\vec{B} = [\ldots] + \mu_0 \vec{j}$.
Nachvollziehbar ist wohl, dass die Stärke der Magnetfeld-Wirbelhaftigkeit proportional zur Stromstärke I bzw. allgemeiner formuliert zur Stromdichte j ist.

Es bleibt aber noch eine Erklärungslücke in den Formeln. Der Gedanke, um diese zu schließen, ist: Könnte es einen derartigen ´Induktionseffekt´, der von der zweiten Gleichung beschrieben wird, nicht auch für die erste Gleichung geben? Dazu müsste man analog zum magnetischen Fluss $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$ einen elektrischen Fluss $\psi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$ definieren dessen zeitliche Änderung, sprich Ableitung $\frac{d\Psi}{dt}$ ein magnetisches Wirbelfeld erzeugen würde.

Und das war eine der genialsten Ideen Maxwells: Analog zu Faradays magnetischer Induktion führte er eine elektrische Induktion ein, bei der ein magnetisches Wirbelfeld durch die zeitliche Änderung eines elektrischen Feldes erzeugt wird.
Anschaulich: Wir schließen einen Plattenkondensator an eine Wechselspannung an. Dann herrscht zwischen den Platten ein zwar räumlich homogenes, aber zeitlich sich änderndes elektrisches Feld. Um den Kondensator herum müsste dann ein magnetisches Wirbelfeld entstehen. Und genau das ist auch in der Tat der Fall.



Während die Wirbelfelder um das Kabel auf den Stromfluss I_L zurückzuführen sind, entsteht auch ein magnetisches Wirbelfeld zwischen den Kondensatorplatten. Dort fließt aber kein Strom, sondern die Ursache ist das sich ändernde elektrische Feld.



Die Maxwell-Gleichungen sind also nicht völlig symmetrisch aufgebaut, denn während ein elektrisches Wirbelfeld ausschließlich durch die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses entsteht (entdeckt von Faraday)*, kann ein magnetisches Wirbelfeld zwei Ursachen haben: den üblichen Leitungsstrom (entdeckt von Oersted) oder die zeitliche Änderung des elektrischen Flusses (entdeckt von Maxwell).
*: *Hier links sehen Sie ein klassisches Experiment zur Erzeugung eines elektrischen Wirbelfeldes mit Hilfe einer Spule an Wechselspannung.*

Dazu Bemerkung 1:
Die 1. und 2. Maxwellsche Gleichung sind völlig symmetrisch, wenn kein Leitungsstrom vorhanden ist. Kann das sein? Ja, die Ausbreitung von elektro-magnetischen Wellen, die ja aus elektrischen und magnetischen Feldern bestehen, ist ein Beispiel dafür. Diese werden durch die Maxwell-Hertz-Gleichung beschrieben, deren Aussage bereits in den ersten beiden Maxwell-Gleichungen prinzipiell enthalten ist.
Bekanntlich breiten sich elektromagnetische Wellen im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit c aus. Damit wird an dieser Stelle deutlich, dass c mit den Feldkonstanten e_0 und μ_0 zusammenhängen muss. In der Tat lässt sich der erstaunliche Zusammenhang $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$ herleiten und belegen.

Bemerkung 2:
Die 1. Maxwell-Gleichung enthält noch die Lücke „[…]“, die erst sehr spät geschlossen wurde. Warum? Weil es experimentell schwierig war, die Existenz der Lücke nachzuweisen. Man braucht dazu elektrische Wirbelfelder, am besten hochfrequente. Erst Hertz gelang 1888 mittels Funkeninduktoren der experimentelle Nachweis. Die geniale Leistung Maxwells war es aber dabei, diesen Effekt aufgrund theoretischer physikalischer Vorstellungen vorauszusagen und mathematisch zu formulieren, bevor er experimentell bestätigt wurde. Bei Gleichströmen oder niederfrequenten Wechselströmen überwiegt das magnetische Feld durch den Stromfluss und überdeckt den magnetischen Induktionseffekt.

zur 3. und 4. Maxwell-Gleichung:

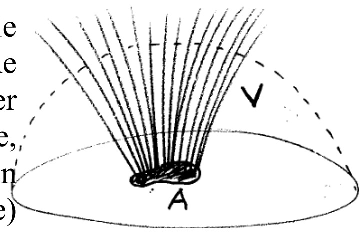
Das wird jetzt leichter, und zwar, weil sie sich mit der Elektrostatik bzw. Magnetostatik beschäftigen. Anders ausgedrückt: Es treten keine Effekte durch zeitliche Änderungen auf.

- Nach Coulomb wissen wir: Elektrostatische Felder sind Quellenfelder mit positiven Ladungen als Quellen.
- Nach Ampére wissen wir: Es gibt keine magnetischen Monopole und damit keine magnetischen Quellenfelder.

Als Maß für die ´Quellenstärke´ haben die Physiker den Operator „Divergenz“ eingeführt (Kurzschreibweise: div). Berechnet wird die Divergenz durch das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit dem Feldvektor (z.B. div $\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}$).

$\vec{E}$ ist also ein Quellenfeld, was durch die Gleichung div $\vec{E} \neq 0$ beschrieben wird.
$\vec{B}$ ist ein quellenfreies Feld, was durch „div $\vec{B} = 0$“ beschrieben wird. Und – zack – schon haben wir wieder eine Maxwell-Gleichung gefunden, die vierte (und kürzeste).

Um die Formeln besser zu verstehen, müssen wir die Divergenz noch etwas genauer erfasse: Stellen wir uns eine Wasserquelle im Erdboden vor, aus der das Wasser fontänenartig herausströmt. Die Ergiebigkeit der Quelle, sprich: die Quellenstärke, könnte man mit der austretenden Wassermenge pro Zeiteinheit (etwa: pro Sekunde) beschreiben.

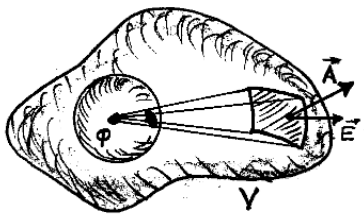


Jetzt kann die Quelle aber über eine Fläche A ausgedehnt sein. Um die Quellenstärke eines Punktes zu erfassen, kann man sie als „Wassermengendichte“ beschreiben.

Die Quellenstärke des elektrischen Feldes ist proportional zur Ladungsdichte ρ, der Proportionalitätsfaktor ist der Kehrwert der elektrischen Feldkonstanten e_0.

Die dritte Maxwell-Gleichung lautet: $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \$ \rho$.
Passt.

Abschließend versuchen wir noch, die Integralform zu verstehen:



Dazu schließen wir die felderzeugende Ladung Q in eine imaginäre, geschlossene Oberfläche $\vec{A}$ ein, die das Volumen V umhülle. Alle von der Ladung Q ausgehenden Feldlinien durchstoßen die Oberfläche $\vec{A}$. Die ´Zahl der Feldlinien´ (die proportional zur Feldstärke ist*) ist proportional zur Gesamtladung Q. Die Zahl der Feldlinien wird, analog zu Faradays Vorstellungswelt, als elektrischer Fluss $\psi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$, definiert. Also ist ψ proportional zu Q, der Proportionalitätsfaktor ist wieder $\frac{1}{\varepsilon_0}$: $\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \$ Q$.

**: Um aus den qualitativen Aussagen der Feldlinienbilder quantitative zu machen, müsste man die Dichte erst einmal festlegen. Z.B. könnte man sagen: Dort, wo das Feld eine Feldstärke von 100.000* $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}$ *hat, sollen 10 Feldlinien pro cm Breite zu sehen sein. Die Festlegung ist willkürlich und an die jeweiligen Felder angepasst, aber für die Überlegungen hier auch nicht von Belang.*

Die Gesamtladung Q kann aus mehreren Einzelladungen zusammengesetzt sein. Um alle Möglichkeiten zu erfassen, denken wir sie Aufsummierung von unendlich vielen, unendlich kleinen Einzelladungen, sprich via Integration der Ladungsdichte ρ über das Volumen V. Also ist $Q = \int_V \rho \cdot dV$.

Damit haben wir die dritte Gleichung auch in der Integralform: $\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \$ Q = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \cdot dV$.

Dieses Gesetz wird übrigens auch als „Gaußsches Gesetz der Elektrostatik“ bezeichnet. Geübte Physiker erkennen, dass es sich dabei um die integrierte Form des Coulomb-Gesetzes $F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$ handelt.

Ich danke Herrn Thomas Karger für die Überarbeitung und Gestaltung des Artikels.

Prof. Josef Leisen
Staatliches Studienseminar Koblenz
Universität Mainz